УДК 517.95

РАВНОСТЕПЕННАЯ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТЬ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ, ПРИМЕНЕНИЯ [1]

© **В. И. Сумин**

Ключевые слова: равностепенно квазинильпотентное семейство операторов; вольтеррова цепочка оператора; теорема об эквивалентной норме.

Аннотация: Вводятся понятия равностепенно квазинильпотентного и суперравностепенно квазинильпотентного семейства операторов. Формулируются соответствующие признаки для случая функциональных операторов; обсуждаются применения введенных понятий и сформулированных признаков.

Пусть B — банахово пространство, Γ — некоторое множество, $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство зависящих от параметра $\gamma\in\Gamma$ действующих в B квазинильпотентных линейных операторов. Напомним, что в соответствии с формулой И.М. Гельфанда квазинильпотентность оператора $G(\gamma)[.]:B\to B$ означает выполнение предельного соотношения: $\sqrt[k]{\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|}\to 0$ при $k\to\infty$.

Следуя [1, 2], семейство операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ назовем *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\sqrt[k]{\|G(\gamma)^k\|}\to 0$ при $k\to\infty$, и — *суперравностепенно квазинильпотентным*, если $\sup\limits_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\Gamma}\sqrt[k]{\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}\to 0$ при $k\to\infty$. Полезность для приложений введенных понятий связана, в частности, со следующей сформулированной в [1] и доказанной в [2] теоремой, которая развивает известные утверждения об эквивалентной норме из §2 главы 2 книги [3].

Т е о р е м а 1. *Пусть норма $\|\cdot\|$ пространства B монотонна относительно полуупорядоченности B по некоторому конусу K, а семейство операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ равномерно ограничено и суперравностепенно квазинильпотентно, причем для каждого из операторов семейства конус K инвариантен. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует эквивалентная норме $\|\cdot\|$ норма $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ пространства B, монотонная относительно полуупорядоченности B по конусу K и такая, что для каждого $\gamma\in\Gamma$ соответствующая норма оператора $G(\gamma)$ не превосходит ε.*

Сформулируем удобный в приложениях цепочечный признак суперравностепенной квазинильпотентности семейства функциональных операторов. Пусть $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ ограничено и измеримо по Лебегу, Σ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π, $E\equiv E(\Pi)$ — банахово идеальное пространство вещественных измеримых на Π функций, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества $H\in\Sigma$. Следуя [4], назовем оператор $G:E\to E$ вольтерровым на системе $T\subset\Sigma$, если $P_HGP_H=P_HG\ \forall H\in T$; весь класс таких операторов обозначим $V(T)$. Пусть δ — положительное число, $\mathcal{T}=\{H_0,H_1,\ldots\ \ldots,H_m\}\subset\Sigma$ — цепочка множеств, $\emptyset=H_0\subset H_1\subset\subset\ldots\subset H_{m-1}\subset H_m=\Pi$. Следуя [1, 2], назовем цепочку $\mathcal{T}$ *вольтерровой сильной δ-цепочкой оператора* $G:E\to E$, если $G\in V(\mathcal{T})$ и выполняются неравенства $\left\|P_{H_i\setminus H_{i-1}}GP_{H_j\setminus H_{j-1}}\right\|_{E\to E}\leqslant\leqslant\delta,\quad m\geqslant i\geqslant j\geqslant 1$.

Т е о р е м а 2. *Если семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ действующих в E линейных ограниченных операторов таково, что для любого $\delta>0$ существует общая для всех операторов семейства вольтеррова сильная δ-цепочка, то это семейство операторов суперравностепенно квазинильпотентно.*

[1]Финансовая поддержка РФФИ (проект № 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)» Минобрнауки РФ (регистрационный № 2.1.1/3927).

В докладе обсуждаются применения сформулированных теорем в теории управляемых краевых задач. Так, в [1, 2, 5-8] эти теоремы применяются для получения достаточных условий сохранения глобальной разрешимости краевых задач при возмущении управления. При этом используется, в частности, то, что в конкретных операторных классах признаку теоремы 2 можно придать удобный для приложений вид. Рассмотрим, например, важный случай лебеговых пространств. Пусть заданы: числа $p, q \in [1, \infty]$, $p \leqslant q$; линейный ограниченный оператор $G : L_p \to L_q$; множество $\Gamma \subset L_r$, где

$$r = \left\{ \frac{pq}{q-p}, \quad \text{если} \quad p < q < \infty; \quad p, \quad \text{если} \quad p < q = \infty; \quad \infty, \quad \text{если} \quad p = q \right\}.$$

В приложениях (см., например, [1, 2, 5-8]) часто приходится изучать семейства операторов $F : L_p \to L_p$, задаваемые формулой

$$F[z](t) \equiv \alpha(t)G[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p \quad (\alpha \in \Gamma). \tag{1}$$

В [1, 2] для семейств вида (1) получен ряд конкретных следствий теоремы 2, удобных для приложений. Чтобы сформулировать некоторые из них, договоримся, следуя [1, 2], цепочку множеств называть *$\delta-$малой по мере*, если мера разностей «соседних» ее элементов не превосходит δ.

Л е м м а 1. *Если $p < q$ и выполняются условия:*
1) Γ *— семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами;*
2) *для любого $\delta > 0$ оператор G имеет δ-малую по мере вольтеррову цепочку,*
то задаваемое формулой (1) семейство операторов $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию теоремы 2 и суперравностепенно квазинильпотентно.

Л е м м а 2. *Если выполнены условия:*
1) Γ *— ограниченное множество в L_r;*
2) *для любого $\delta > 0$ оператор G имеет вольтеррову сильную δ-цепочку,*
то задаваемое формулой (1) семейство операторов $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию теоремы 2 и суперравностепенно квазинильпотентно.

Л е м м а 3. *Если $q < \infty$, оператор G вполне непрерывен и выполнены условия 2) леммы 1 и 1) леммы 2, то задаваемое формулой (1) семейство операторов $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию теоремы 2 и суперравностепенно квазинильпотентно. Условие вполне непрерывности здесь может быть ослаблено до следующего условия: оператор $G : L_p \to L_q$ переводит единичный шар в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 1998. Вып. 2 (19). С. 138-151.

2. *Сумин В.И.* Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах. Н. Новгород, 1998. 96 с. Деп. в ВИНИТИ 03.09.98. № 2742-B98

3. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962.

4. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.

5. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. ННГУ. Математика. Н. Новгород, 2003. Вып. 1. С. 91-108.

6. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I; II; III; IV // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 1999. Вып. 2 (21). С. 145-155; 2001. Вып. 1 (23). С. 198-204; 2002. Вып. 1 (25). С. 164-174; 2004. Вып. 1 (27). С. 185-193.

7. *Лисаченко И.В.*, *Сумин В.И.* Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. I; II // Вестн. ННГУ. Математика. Н. Новгород, 2005. Вып. 1 (3). С. 88-101; 2006. Вып. 1 (4). С.65-80.

8. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса-Дарбу // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 2006. Вып. 2 (31). С. 64-81.

Abstract: definition of uniform quasinilpotent family of the operators and definition of superuniform quasinilpotent family of the operators are introduced; corresponding conditions for functional operators are formulated; applications of these definitions and conditions are discussed.

Keywords: uniform quasinilpotent family of the operators; Volterra chain of the operator; theorem about the equivalent norm.

Сумин Владимир Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

Vladimir Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: v_sumin@mail.ru